L'insegnamento della matematica
e delle Scienze Integrate — Vol. 7 N. 3 – Giugno 1984

INDICE

===

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA
PER PROBLEMI
SPUNTI DI DISCUSSIONE

Carlo Felice MANARA
Dipt. di Matematica
"F. ENRIQUES"
Università di Milano

===

Carlo Felice MANARA

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA PER PROBLEMI
SPUNTI DI DISCUSSIONE

1 - Il concetto di problema matematico

Le considerazioni che seguono sono destinate ad essere un insieme di spunti di discussione ed a stimolare ulteriori approfondimenti; pertanto non debbono essere considerate come dei precetti per la soluzione di problemi didattici, che sono complicati e difficili, ma come un avvio all'analisi ed al chiarimento, ed alla ricerca di una strategia risolutiva, quando essa esista.

In linea preliminare, vorremmo dire che l'insegnamento della matematica dovrebbe mirare a far comprendere ed a far possedere un insieme di mezzi espressivi e di strumenti logici utili alla formazione personale ed alla crescita intellettuale; pertanto tale insegnamento non dovrebbe limitarsi all'addestramento all'uso di certi strumenti formali e linguistici, ma dovrebbe invece tendere alla formazione dell'uomo razionale e concreto.

Prima di proseguire nelle nostre riflessioni, vogliamo fare una breve analisi dei termini che intendiamo usare.

Infatti oggi, nella generale imprecisione del linguaggio e nella confusione che ne consegue, il termine *problema* viene usato troppo frequentemente, ed in modo equivoco ed impreciso: per esempio esso viene usato al posto di molti altri, che sarebbero ben più comprensibili e precisi, come *dubbio*, *cruccio*, *difficoltà*, *incertezza*, *impiccio*, *sofferenza*, *dolore* e così via, accumulando spropositi e confusioni, tanto che non ci sarebbe da meravigliarsi nell'udire qualcuno che invece di dire sempli cemente che ha mal di testa, dicesse che "... ha dei problemi di cefalea".

Noi vorremmo evitare queste confusioni, che non vanno certo a favore della chiarezza delle idee e quindi dell'incremento della conoscenza e del sapere; pertanto intendiamo riservare al termine problema il significato classico, che potrebbe essere richiamato brevemente dicendo che il termine indica una questione in cui si debbono rendere esplicite certe informazioni che già sono contenute implicitamente in altre, le quali vengono abitualmente dette dati del problema.

Di conseguenza risolvere un problema significa formulare esplicitamente certe informazioni ricavandole con procedimenti razionali, che possono essere puramente deduttivi, come nel caso del problema matematico, a cui sempre faremo riferimento. Non prenderemmo quindi in considerazione le risposte ad un problema che possano essere ottenute con un procedimento induttivo, cioè con la generalizzazione di poche esperienze od osservazioni fatte in pochi casi particolari.

Noi supporremo inoltre che il problema di cui ci interessiamo tragga la sua origine da un enunciato, che espone una situazione particolare concreta e richiede una risposta, cioè richiede - ripetiamo - ulteriori informazioni in base a quelle che già sono date nell'enunciato.

Si potrebbe dire che la soluzione di un problema matematico passa attraverso certe fasi, che cercheremo di analizzare e di presentare qui, perchè riteniamo che il superamento di ognuna di esse presenti particolari e specifiche difficoltà al discente e corrispondentemente abbia certe sue determinate possibilità educative e formative, che il docente dovrebbe conoscere per poterle sfruttare.

Osserviamo tuttavia che queste fasi possono essere distinte in teoria, ma che in pratica possono anche non essere completamen

te separate tra loro e succedersi nel tempo con una successione cronologica perfettamente consona alla gerarchia logica; e ciò accresce la utilità della analisi che stiamo per fare, per poter dare al docente la possibilità di discernere le diverse componenti di una azione del discente che può anche presentarsi come complessa e confusa.
Le fasi cui accennavamo poco sopra possono essere presentate nel modo seguente:

1 - il riconoscimento della essenza del problema matematico nell'enunciato che si propone;
2 - la ricerca di una procedura di soluzione, cioè la invenzione di una strategia che renda esplicite le informazioni che si possono trarre dai dati, cioè dalle informazioni già fornite nell'enunciato;
3 - la utilizzazione degli strumenti matematici per dedurre e per giungere alle conclusioni, e poi la interpretazione dei simboli matematici nella realtà della situazione concreta che è stata presentata come oggetto del problema.

2 - L'enunciato del problema ed il riconoscimento della situazione matematica.

Da quanto abbiamo detto segue che in un primo momento il discente si trova di fronte alla enunciazione di un problema matematico; tale enunciazione viene fatta verbalmente, con il linguaggio comune (la lingua materna), e presenta una situazione concreta, anche se non materialmente presente al discente nella sua corporeità. La presentazione di questa situazione concreta fornisce anche le informazioni da cui il discente deve partire e delle quali deve profittare per cercare le risposte.

Si potrebbe osservare che le difficoltà che il discente deve affrontare in questa prima fase sono le seguenti:

1 - la individuazione della situazione che richiede risposta; è questo un esercizio di decodificazione, con il quale il discente deve capire il significato della situazione concreta che gli viene proposta;
2 - la schematizzazione della situazione, ai fini della codificazione con simboli della matematica (figure geometriche, numeri, operazioni ecc.)
E' chiaro che se per esempio il problema parla di un collo parallelepipedo, il discente deve individuare le caratteristiche del collo stesso che interessano ai fini della risposta cercata; per esempio il colore del collo non deve essere preso in considerazione se si tratta di valutarne l'ingombro; e l'ingombro da solo non deve essere preso in considerazione se si tratta di valutarne il peso.
E' questo dunque un primo momento in cui il discente viene condotto a mettere in opera un procedimento di astrazione, cioè un procedimento mentale che lo porta a considerare soltanto alcuni elementi di una situazione concreta, elementi che sono i soli interessanti ai fini della risposta.
Abitualmente soltanto questi elementi sono precisati direttamente nell'enunciato del problema; tuttavia può anche avvenire che le informazioni dell'enunciato siano sovrabbondanti e quindi inutili; in tal caso questa sovrabbondanza dovrebbe essere evitata oppure cercata, a seconda che l'insegnante voglia evitare ogni distrazione al discente, oppure voglia al contrario provare se il discente stesso è capace di discernere da solo gli elementi interessanti dagli altri che non sono pertinenti al problema proposto.
3 - Gli aspetti della realtà che viene presentata debbono poi essere tradotti, e per così dire codificati in simboli della

matematica (figure geometriche, numeri, operazioni ecc.) a seconda dei fini che si vogliono.
Così per esempio, se si tratta di valutare il peso di una sfera di acciaio, le informazioni che servono sono il raggio della sferetta ed il peso specifico dell'acciaio.
La prima informazione potrebbe essere data direttamente nel testo, la seconda potrebbe essere fatta cercare al discente, il quale, dalla informazione sufficiente data dalla parola "acciaio" dovrebbe essere in grado di ricercare su una tabella il peso specifico, che codifica le caratteristiche della materia con i simboli della matematica, ai fini cercati. Vorremmo rilevare che quest'ultima operazione è perfettamente razionale, perchè rientra nello sfruttamento di informazioni che sono accessibili al discente e che gli permettono di passare dalla descrizione qualitativa (acciaio) a quegli aspetti quantitativi che interessano il problema in esame.
Ci pare di poter dire che noi eseguiamo quotidianamente moltissime operazioni logiche di questo tipo; il compito dell'insegnamento della matematica è anche quello di avviare all'analisi esplicita di queste operazioni, in modo che ciò che è generalmente inconscio e confuso diventi cosciente, chiaro e quindi ripetibile e generalizzabile.
Riteniamo opportuno anche ricordare che occorrerebbe graduare lo sforzo di astrazione che si richiede al discente, in modo da poterlo guidare progressivamente alla analisi logica degli enunciati verbali ed alla operazione, non sempre facile, di individuare gli elementi degli enunciati che possono essere tradotti in linguaggio matematico, in relazione ad un determinato problema ed ad un determinato fine. Infatti una medesima realtà concreta può essere guardata in molti modi diversi, e quindi lo sforzo di astrazione che il discente deve compiere consiste nel mettere in evidenza soltanto quegli aspetti che debbono essere

presi in considerazione in vista delle informazioni richieste. Non si nega con questo la esistenza di altri aspetti della realtà, ma si afferma soltanto che nel quadro complesso e composito che ci viene presentato dalla esperienza, la conoscenza scientifica e razionale è obbligata necessariamente a fare delle scelte, le quali avvengono appunto mediante il procedimento di schematizzazione e di astrazione che abbiamo cercato di descrivere.

3 - La ricerca della strategia risolutiva.

Abbiamo considerato una prima fase della risoluzione di un problema, fase che consiste - come abbiamo detto - nella individuazione delle informazioni richieste e nella codificazione di queste con simboli del linguaggio matematico (figure geometriche, numeri, operazioni ecc.); la seconda fase si potrebbe descrivere come la ricerca di una risposta, cioè nella ricerca di una procedura razionale e certa che porta a formulare esplicitamente le informazioni richieste dal problema e che sono contenute implicitamente nei dati.
Ripetiamo che non sempre è possibile separare nettamente questo secondo momento dal primo, perchè spesso la strategia di risoluzione può essere influenzata dal modo in cui è stata conseguita la astrazione dell'oggetto del problema dall'enunciato della situazione concreta. Quindi - ripetiamo - i due momenti che stiamo considerando sono spesso difficilmente separabili, anche se possono essere distinti con una analisi attenta. Questa tuttavia non è sempre facile, perchè chi escogita una strategia di soluzione di un problema non sempre riesce a rendersi conto della sua genesi, ed anche quando ciò avviene, difficilmente riesce a descriverla agli altri; tuttavia pensiamo che

questa analisi sia utile, soprattutto perchè il docente possa rendersi conto della genesi di eventuali strategie sbagliate, e possa quindi guidare il discente alla loro correzione.

In linea di massima, si potrebbe dire che la invenzione di una strategia di soluzione si basi molto spesso sulla scoperta di una analogia, sul collegamento del particolare problema concreto proposto con altri, posti da casi simili; in questa procedura quindi la fantasia ha una grande parte. Ciò è di fondamentale importanza nei problemi di geometria, in cui la capacità di immaginare delle figure simili a quelle date, la capacità di immaginare delle manipolazioni e degli spostamenti, che portino la figura data in una situazione più nota o più abituale, o tale da permettere delle misure o dei cambiamenti, aiuta molto il discente alla ricerca della soluzione. Tuttavia si possono fare delle considerazioni analoghe a proposito del problema di aritmetica; citiamo per esempio il caso dei problemi che riguardano degli insiemi concreti. Per esempio quando il discente ha capito che la operazione di far uscire da una classe tre scolari su trenta è "simile" alla operazione che consiste nell'estrarre tre gettoni da un sacchetto che ne contiene trenta, ha eseguito quella operazione di astrazione che lo conduce al livello del concetto generale di numero intero naturale, e lo porta quindi a considerare soltanto gli aspetti matematici delle due questioni, che sono materialmente distanti, ma che concettualmente coincidono.

Questa seconda fase della soluzione del problema porta spesso alla necessità o alla opportunità di operare su simboli delle cose. Tali simboli possono essere delle figure, che rappresentano la realtà concreta così come viene schematizzata dagli enti della geometria, oppure sono simboli numerici; in questo secondo caso le trasformazioni di questi simboli, che si ottengono mediante le "operazioni", traducono la strategia risolutiva

che è stata adottata. Così nell'esempio citato poco sopra, dal riconoscimento del fatto che sostanzialmente i due problemi sono simili, si giunge alla operazione di "sottrazione", che si esegue sui numeri che rappresentano gli insiemi considerati.
Pare opportuno osservare che le operazioni che si eseguono sui numeri sono qualche cosa di diverso dalla strategia risolutiva del problema; precisamente essi sono soltanto un mezzo, uno dei tanti, col quale tale strategia può essere messa in esecuzione. Pertanto siamo qui soltanto ad un momento esecutivo, che può eesere molto importante, ma che non deve essere messo in posizione predominante rispetto al momento della invenzione della strategia risolutiva. Invece spesso, nella mente del discente, la operazione aritmetica prende una posizione importante e quasi fondamentale, rispetto alla invenzione della strategia risolutiva; ciò è dovuto forse al fatto che la operazione aritmetica deve rispettare delle regole molto rigide; regole che devono essere rispettate tutte (sotto pena di errori che inficiano tutto il calcolo), che debbono essere memorizzate faticosamente, e che non sempre l'utente sa pienamente giustificare. Pensiamo tuttavia che il docente debba saper distinguere tra i due momenti, quello della invenzione della strategia risolutiva e quello del calcolo, perchè egli deve saper intervenire ai vari livelli, a secondo degli errori che il discente eventualmente può commettere.
Si potrebbe anche aggiungere che la scoperta della analogia tra due problemi materialmente molto diversi ma strutturalmente identici potrebbe legittimare la risoluzione concreta di un problema su di un "modello" della realtà di cui parla l'enunciato del problema stesso.
Così per esempio nel caso del problema esposto, poco sopra, quando si fossero dimenticate le regole che reggono la operazione di sottrazione sui simboli numerici, una strategia per-

fettamente ragionevole e legittima potrebbe consistere nel contare i gettoni rimasti nel sacchetto. Infatti ciò che veramente costituisce la essenza logica della soluzione è il riconoscimento della sostanziale identità dei due problemi e non la capacità di eseguire correttamente certe manipolazioni di simboli.

A questo proposito pensiamo che sia bene ricordare che nella nostra società stanno diffondendosi i calcolatori tascabili elettronici; invero questi strumenti sono oggi venduti anche in certi supermercati ed a prezzi molto bassi, ed il loro impiego sta diffondendosi anche presso i piccoli esercenti.

Questo fatto va tenuto presente quando si cerca di fare la distinzione tra i due momenti della soluzione del problema matematico; invero la adozione di uno strumento cosiffatto permetterebbe di eliminare quasi del tutto la fatica materiale della computazione e del calcolo, e quindi permetterebbe di concentrare l'attenzione del discente soltanto sul momento essenziale, che è quello della invenzione della strategia risolutiva. Tuttavia queste considerazioni non hanno un valore assoluto e generale: è chiaro infatti che è necessario insegnare la esecuzione delle operazioni aritmetiche, anche per evitare ai discenti la jattura di diventare completamente schiavi di questi apparecchi. Ma rimane sempre vero anche che il momento fondamentale della ricerca di una risposta ad un problema non sta nelle operazioni aritmetiche ma nella invenzione di una strategia, e che le operazioni aritmetiche possono (almeno in linea di principio) essere sostituite da altre che portano alle giuste risposte, anche se per altre vie e forse più faticosamente.

4 - La interpretazione dei risultati.

Abbiamo visto che la scelta della procedura di soluzione di un problema matematico conduce alla manipolazione di certi mezzi espressivi (figure, numeri, operazioni ecc.) con i quali abbiamo rappresentato la realtà concreta che ci è stata presentata nella enunciazione del problema.

La manipolazione dei mezzi espressivi è costituita da quell'insieme di operazioni (trasformazione di figure, operazioni aritmetiche e così via) sui simboli che abbiamo adottato: sostanzialmente quindi si riduce a delle operazioni su certi modelli della realtà concreta e di conseguenza il momento essenziale di queste procedure consiste nel riconoscere che i modelli che abbiamo adottato rendono esattamente quegli aspetti della realtà che vogliamo conoscere, e che le manipolazioni sui modelli ci forniscono effettivamente le informazioni che desideriamo.

In altre parole le operazioni che eseguiamo sui modelli ci permettono di dedurre, cioè di costruire delle proposizioni vere a partire da quelle proposizioni che sono state enunciate col problema e che noi assumiamo come vere. Quindi, come abbiamo detto ripetutamente, le operazioni sui simboli non fanno che rendere esplicite le informazioni che ci sono state date in partenza, e presentano queste informazioni esplicite in modo tale che la attenzione possa essere concentrata su di esse.

Insistiamo su queste osservazioni, perchè vorremmo che fosse chiaro il fatto che le manipolazioni, i calcoli, le trasformazioni che noi eseguiamo non ci possono dare delle informazioni essenzialmente nuove. Ciò che diciamo si applica soprattutto alla "lettura" ossia alla "interpretazione" dei risultati di certe operazioni con le quali abbiamo cercato di rispondere al problema e quindi si applica alla valutazione del significato di queste operazioni.

Pensiamo infatti che ad ogni livello di età ed in ogni classe di insegnamento si possa presentare un giusto concetto della matematica: questa è una scienza che fornisce un insieme di strumenti di astrazione, di concettualizzazione e di deduzione, ma che trova la certezza solo nella deduzione, e non può quindi costruire la certezza laddove essa non si trovi nella osservazione originaria della realtà.

Un esempio, tra i tanti possibili, aiuterà a chiarire il nostro pensiero: supponiamo dato il problema:

"Il diametro di una circonferenza è 2 m.; quanto è lunga la "circonferenza?".

La risposta viene presentata come il risultato della operazione che consiste nel moltiplicare la lunghezza del diametro, espressa in metri, per il numero che molti chiamano "costante di Archimede" e che viene anche frequentemente chiamato "pi greco". Nella maggior parte dei casi questa costante viene rappresentata con il numero decimale 3,14, e non ci si cura di avvertire che questo è un valore soltanto approssimato della costante in questione. Occorrerebbe invece dire che questa è compresa tra 3,14 e 3,15, e che quindi il valore della lunghezza della circonferenza, anche supponendo che la misura della lunghezza del diametro sia perfetta (il che non è mai nella pratica) è compreso tra 6,28 m. e 6,30 m.; quindi la operazione aritmetica dà un intervallo di ben 2 cm. di errore possibile per il risultato.

Questi ragionamenti, ed altri moltissimi analoghi, potrebbero sconcertare coloro i quali considerano la matematica come la scienza della certezza per eccellenza, ma dimenticano che la elaborazione matematica non può dare informazioni che non siano contenuti nei dati; nella fattispecie, se si adottano delle informazioni tali che portano a dare alla costante di Archimede il valore 3,14 come valore esatto (il che non è) si ottengono poi dei risultati la cui inesattezza può essere rilevata an

che con misure rudimentali.
Pensiamo quindi che l'insegnante non debba lasciar passare nessuna occasione per togliere alla matematica quel valore quasi magico che molti le attribuiscono, e per conferirle invece il suo vero aspetto, cioè quello di uno strumento per la deduzione ineccepibile e per la formazione scientifica dell'uomo.

5 - La geometria come prima schematizzazione scientifica del reale.

La Storia della scienza insegna che la prima conoscenza scientifica della realtà si è presentata con la geometria greca; e con la espressione "conoscenza scientifica" intendiamo indicare una conoscenza che abbia i caratteri della certezza e della motivazione, cioè una conoscenza che non soltanto presenti le cose come sono (il che sarebbe solo informazione) ma anche dia - nei limiti del possibile -) anche il "perchè" le cose sono come ci appaiono.
In questa luce ed in questo ordine di idee gli "Elementi" di Euclide ci appaiono come il primo trattato scientifico della Storia dell'uomo, cioè un trattato in cui, a partire da certe proposizioni iniziali date senza dimostrazione in forza della loro evidenza, ogni altra proposizione viene rigorosamente dimostrata e quindi acquista quella certezza che le è conferita dalla certezza delle premesse e dal rigore della dimostrazione. Occorreranno secoli perchè l'umanità riesca a conquistare altri domini di conoscenza con lo stesso stile e con una procedura analoga; invero in questo stesso ordine di idee vorremmo dire che i "Principia mathemathica" di I. Newton fanno rientrare la meccanica dei corpi rigidi, cioè le leggi del movimento dei cor

pi in relazione alle cause che lo producono, nello schema ideale che il trattato euclideo aveva tracciato.
Sulla scorta di queste considerazioni noi pensiamo che l'insegnamento della geometria abbia un suo carattere formativo della mentalità scientifica, a tutti i livelli di età e di scuola, carattere che difficilmente potrebbe essere surrogato da altre materie e da altri insegnamenti.
Per quanto riguarda la scuola elementare, vorremmo ricordare che un primo passo verso la conoscenza razionale del mondo attraverso la geometria può essere fatto con l'educazione alla osservazione completa ed all'uso di un linguaggio preciso.
Infatti si potrebbe dire che l'uomo, nel suo primo contatto con la realtà che lo circonda, tende a rappresentare l'universo in relazione a se stesso; quindi l'uomo descrive la propria situazione rispetto al mondo che lo circonda distinguendo un "davanti" ed un "dietro", un "sopra" ed un "sotto" e così via e di conseguenza è portato a dare carattere di obbiettività a certe situazioni che invece non lo posseggono.
Quindi il primo momento educativo che può essere vissuto con la geometria è quello che porta il discente a riflettere che alcune circostanze possono variare, nella posizione dei corpi e nella loro grandezza; e che, se vuole comunicare agli altri le proprie osservazioni in forma obbiettiva, deve sforzarsi di porsi nella situazione degli altri osservatori e deve comunicare le proprie osservazioni in modo che le comunicazioni abbiano il massimo di validità.
Purtroppo la abitudine al linguaggio impreciso porta a confondere "verticale" con "perpendicolare" ed anche "orizzontale" con "parallela", cioè a confondere ciò che ha significato soltanto con riferimento ad un osservatore con ciò che invece non dipende da questo.
Analoghe osservazioni potrebbero essere formulate a proposito

di certo linguaggio che vorrebbe essere tecnico e che invece va incontro agli stessi inconvenienti; come la abitudine diffusa che porta a parlare della "base" e dell'"altezza" di un triangolo inducendo così l'ascoltatore o il lettore a pensare che esista una qualità inerente ad un lato della figura, indipendente dalla posizione di un supposto osservatore.
Gli esempi si potrebbero moltiplicare, e porterebbero a ricordare una grande quantità di frasi imprecise ed equivoche, fino a giungere a quella famosa frase in cui si parlava di "convergenza delle parallele"; frase il cui grande successo politico fu ovviamente causato dalla sua assurdità concettuale.
Noi pensiamo invece che l'insegnante debba mettere la più grande cura nel cercare di estirpare queste abitudini da se stesso e dai discenti, per educarsi ed educare alle enunciazioni precise ed al linguaggio limpido; ma soprattutto per educare alla obiettività della osservazione e della espressione.
Perchè ad ogni livello la scienza tende a costruire delle proposizioni e degli enunciati che siano validi per tutti ed in qualunque condizione di osservazione e quindi tende a prescindere dalla situazione del singolo osservatore.
Queste osservazioni possono essere considerate banali e lo sono di fatto, perchè sono il patrimonio iniziale e fondamentale di chiunque si occupi di scienza in modo serio.
Ma riteniamo che sia utile ricordarle, perchè pensiamo che la formazione alla mentalità scientifica possa essere iniziata fino dai primi anni di scuola; ed insieme con la mentalità scientifica pensiamo che si possa anche dare la chiara sensazione dei limiti della scienza, delle sue capacità espressive e della sua potenza conoscitiva, nella convinzione che la scienza non può dire tutto della realtà che ci si presenta come inesauribile, ma può contribuire alla formazione della persona, con la educazione alla obbietività ed alla umiltà di fronte al

reale.
Pensiamo infine che non sarà mai abbastanza ripetuto che nell'insegnare la matematica si deve tener presente la chiarezza della esposizione e la correttezza ed il rispetto della nostra lingua.

6 - Il problema nell'insegnamento: punto di partenza o di arrivo?

Pare abbastanza chiaro il fatto che l'insegnamento della matematica debba necessariamente includere anche il confronto con il problema; infatti, se consideriamo la matematica come un insieme di procedure di espressioni e di deduzione, il suo studio deve necessariamente includere anche l'esercizio, che è essenziale nell'apprendimento di ogni linguaggio, in quanto fondamentale strumento di comunicazione.
E' tuttavia possibile presentare il problema matematico con vari atteggiamenti, a seconda della strategia didattica che si intende seguire e della metodologia che si intende adottare: infatti il problema può essere considerato come un momento di applicazione, come un esercizio necessario (ripetiamo) per lo apprendimento spedito e il dominio sicuro dei mezzi espressivi, oppure addirittura come il punto di partenza, come la occasione iniziale e centrale che dà origine alla presentazione degli strumenti espressivi e allo studio delle loro proprietà formali e della loro struttura logica.
Pare abbastanza chiaro che i due atteggiamenti sono distanti tra loro: nel primo infatti gli strumenti formali della matematica sono presentati prima della loro utilizzazione, e quindi quest'ultima viene vista soltanto come un momento di addestra-

mento ed una giustificazione "a posteriori" della validità degli strumenti presentati e della loro potenza espressiva e deduttiva; nel secondo caso invece gli strumenti della matematica vengono via via trovati ed inventati, nascono - per così dire - spontaneamente, perchè la loro presenza e la loro applicazione è richiesta dalla necessità di dare risposta a certe domande che altrimenti rimarrebbero inevase; oppure la opportunità della loro conoscenza viene convalidata dalla forte diminuzione di fatica e dalla crescita di certezza e di generalità delle risposte che così si possono dare ai problemi.
E' appena necessario osservare che la seconda strada ripercorre anche la evoluzione stessa della scienza, perchè i vari strumenti della matematica e le varie teorie di questa scienza si sono spesso presentati alla ribalta in occasione di determinati problemi a cui occorreva rispondere e che non potevano essere risolti con i mezzi di cui prima si disponeva; in altre parole si potrebbe dire che gli strumenti matematici ed i problemi sono nati insieme, perchè un determinato problema ha richiesto la elaborazione di certi strumenti, e viceversa il processo di certi strumenti ha reso possibile il prendere in considerazione determinati problemi, prima neppure sfiorati, ed ha favorito la genesi e la formulazione di altri.
Indipendentemente dalle considerazioni storiche, resta comunque il fatto che le strategie didattiche dettate dai due atteggiamenti possono essere molto diverse tra loro e possono richiedere di conseguenza anche diversi atteggiamenti e diverse preparazioni da parte degli insegnanti.
Non è nostra intenzione dare qui un giudizio definitivo a proposito dei due atteggiamenti citati e vorremmo quindi soltanto limitarci ad un tentativo di analisi, prendendo in considerazione la genesi di questi atteggiamenti e le eventuali conseguenze nei riguardi dell'apprendimento e della formazione personale dei

discenti.
Si potrebbe pensare che il primo atteggiamento, cioè quello che consiste nel presentare prima sistematicamente gli elementi del linguaggio matematico, e poi farli applicare per mezzo di esercizi e problemi, sia quello più tradizionale, e che invece le correnti didattiche, le quali predicano la presentazione della matematica per problemi portino il segno della modernità e quindi del progresso che a quella viene spesso associato.
E' da osservarsi tuttavia che l'idea della presentazione della matematica per problemi non è affatto nuova; tra i precedenti illustri, citiamo tra i tanti il nome di A.C. Clairaut che scrisse un libretto intitolato "Eléments de géométrie" proprio per presentare la geometria in questo modo.
Si potrebbe tuttavia osservare che la presentazione di una teoria qualsivoglia per problemi appare abbastanza valida ed efficace quando la teoria stessa debba essere presentata a dei soggetti già maturi (come era appunto il caso di Clairaut), che in qualche modo hanno già un certo patrimonio di conoscenze e che difficilmente tendono ad acquistarne altre se non sono motivati con vivi interessi e con precisi contenuti. Invece la presentazione di una materia secondo la linea logica e sistematica, che presenta via via la teoria nei suoi elementi prima di ogni applicazione, appare forse più efficace per soggetti di giovane età, che hanno molta disponibilità di memoria ed una massa di conoscenze relativamente minore.
Si potrebbe anche aggiungere che in questi soggetti, non abituati all'analisi, la presentazione di un problema complesso, nella sua interezza e nella globalità dei suoi aspetti, può indurre confusione ed anche sensazione di impotenza, e che la gradualità dell'insegnamento delle strutture complesse è spesso condizione necessaria perchè queste vengano apprese.

Ripetiamo quindi che non abbiamo soluzioni generali, valide in ogni caso e definitive, perchè la presentazione della matematica per problemi ha degli indubbi vantaggi, che consistono nella sensazione di efficacia, di "presa" sulla realtà che viene data dal modo stesso con cui la teoria viene costruita a partire dal problema; cosicchè la teoria stessa viene pienamente motivata nella sua esistenza e nella sua applicazione dalla presenza del problema che la rende in qualche modo necessaria. Ma è pure vero che questo modo di presentare una teoria può rendere più difficile al discente il districarsi nelle difficoltà logiche; difficoltà che sono particolarmente pesanti per coloro che si trovano a disagio nelle formulazioni teoriche astratte e che utilizzano simboli.
Non dobbiamo infatti dimenticare che spesso certi individui (del resto anche intelligenti) provano una specie di repulsione per il simbolismo astratto ed artificiale della matematica, ed una grande antipatia per la deduzione formale, fatta in base alle sole leggi dei simboli, deduzione che è tipica della matematica. Di fronte a questi soggetti la presentazione della materia per problemi potrebbe presentare anche degli aspetti negativi: infatti da una parte la presenza di un contenuto, a cui la fantasia può fare riferimento, potrebbe facilitare anche la giustificazione dell'impiego di mezzi espressivi simbolici e convenzionali; ma d'altra parte la necessità di aggredire un problema concreto, nella sua complessità ed interezza, potrebbe scoraggiare chi non ha attitudine all'analisi attenta ed alla codificazione convenzionale delle situazioni concrete.
Sarebbe quindi auspicabile in ogni caso un atteggiamento didattico la cui efficacia e validità si fonda sulla continua aderenza alla realtà delle cose che si vogliono presentare; ma soprattutto non ci stancheremo di raccomandare la cura attenta nell'evitare ogni esclusivismo metodologico ed ogni unilatera-

lità di atteggiamenti. Pensiamo infatti che ogni metodologia didattica abbia i suoi vantaggi e le sue difficoltà e che non si possa assumere l'atteggiamento di chi attribuisce tutti i successi ai nuovi metodi e cerca di mascherare gli eventuali insuccessi con pretesti d'accatto.
In particolare, per quanto riguarda la matematica, pensiamo che non esistano strade miracolose per la formazione della mentalità adatta a questa scienza: pensiamo infatti che la formazione matematica vada di pari passo con la maturazione razionale del discente. Sarebbe quindi illusorio il credere che solo una determinata metodologia possa costruire dei "geni" matematici con dei soggetti che non hanno ancora sviluppato una sufficiente maturazione anche negli altri campi della conoscenza.

7. Lo sviluppo storico della scienza ed il suo insegnamento.

Vorremmo infine osservare che l'insegnamento della matematica per problemi può porre delle difficoltà analoghe a quelle che si incontrano quando si cerca di introdurre la dimensione storica nell'insegnamento. In questo ordine di idee infatti ci si trova spesso di fronte ad una situazione abbastanza ambigua e difficile: da una parte appare innegabile la grande utilità di presentare i problemi della matematica come erano all'origine, in modo da presentarne la globalità e da coglierne a pieno il significato quando erano - per così dire - allo stato nascente. Ma d'altra parte non si può trascurare il valore della analisi metodica, della graduale introduzione di concetti via via più difficili e più complessi, presentati secondo la loro gerarchia logica di dipendenza e di complessità e non semplicemente nell'ordine in cui cronologicamente sono stati elaborati.

Nei fatti si sono presentate delle circostanze che hanno messo in evidenza le difficoltà dell'insegnamento che è troppo distaccato dalla realtà, come quello che viene impartito da chi presume che la semplicità concettuale vada di pari passo con la facilità di apprendimento.

Così certe recenti correnti di didattica hanno pensato di poter introdurre la cosiddetta "matematica moderna", cioè hanno creduto di poter trovare la via di minima resistenza per l'apprendimento cominciando con l'insegnare le idee più astratte e generali, e quindi a buon diritto considerate come le più "semplici". Ma si può osservare che la semplicità delle idee generalissime non si accompagna alla facilità dell'apprendimento. Infatti l'apprendimento è un fenomeno molto complesso e segue delle leggi che sono certamente diverse da quelle che la logica ritrova nella gerarchia delle idee della matematica. Crediamo di poter dire che nel procedimento dell'apprendimento ha una grande parte l'interesse del discente, e quella specie di sfida intellettuale che ogni uomo si trova a dover affrontare quando è di fronte al nuovo e ad idee interessanti.

Ma la ricerca della giusta strategia didattica per poter sfruttare questa situazione richiede sempre pazienza, studio, fatica e dedizione.